

Кузьминов В.Е. Законы и формулы физики. — К.: Наукова думка, 1989. — 864 с. 3. Воронов И.Г., Кожуховский И.Е., Колышев П.П., Павловский Г.Т. Очистка и сортирование семян. — М.: Гос. изд. сельскохозяйственной литературы, 1959. — 581 с. 4. Кленин Н.И., Сакун В.А. Сельскохозяйственные и мелиоративные машины. — М.: Колос, 1980. — 671 с. 5. Заика П.М., Мельник В.И., Аникеев А.И. Свободное движение материальной точки в спокойной изотропной газообразной среде // Динамика и прочность машин: Вестник НТУ “ХПИ”. Выпуск 25 / Харьков: ХГПУ, 2001. С. 153 – 164. 6. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов: Учеб. пособие для втузов. — 13-е изд. В двух томах. Т. 2. — М.: Наука, 1985. — 560 с. 7. Фикстен-гольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В трех томах. Т. 2. — СПб.: “Лань”, 1997. — 800 с. 8. Фурманов Р.И., Фурунжиев Р.И., Бабушкин Ф.М., Варавко В.В. Применение математических методов и ЭВМ: Практикум. Учеб. пособие для вузов. — Минск: “Высшая школа”, 1988. — 191 с.

Поступила в редколлегию 05.04.02

УДК 539.3

А.А.ЗОЛОЧЕВСКИЙ, д-р техн.наук; **Л.А.ЗОЛОЧЕВСКАЯ**;
Ю.С.КОЗЬМИН

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ВАРИАНТ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ ПОВРЕЖДАЮЩИХСЯ СРЕД, РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩИХСЯ РАСТЯЖЕНИЮ И СЖАТИЮ

Побудовано визначальні рівняння повзучості та кінетичне рівняння пошкодження для початково-ізотропних матеріалів з різним опором розтягуванню та стискуванню. Розглянуто процедуру для знаходження параметрів в запропонованій моделі. Проаналізовано різні спрощені моделі, що впливають з загальної теорії. Проведено порівняння теоретичних результатів з експериментальними даними для поздовжньої та поперечної деформацій повзучості за умов одновісного навантаження.

Исследования микроструктуры кристаллических конструкционных материалов с помощью электронного и оптического микроскопов показывают, что, даже в ненагруженном состоянии, рассматриваемые материалы содержат различные микротрещины, поры, пустоты, инородные включения и другие дефекты. Еще более сложная картина, связанная с ростом имеющихся дефектов структуры и появлением новых дефектов, замечена при нагружении материалов в условиях ползучести. При этом наблюдается зависимость в поведении микродефектов от вида нагружения. Так, при одноосном растяжении хрупких материалов происходит рост микродефектов, ориентированных перпендикулярно направлению растягивающего усилия [3-5,7,8]. С другой стороны, при одноосном сжатии наблюдается смыкание берегов и закрытие микродефектов, перпендикулярных сжимающему усилию, и рост микродефектов в направлении этого усилия [5,8]. Во многих случаях сложного напряженного состояния зарождение и рост микродефектов в хрупком материале при ползучести связаны с направлением наибольшего главного напряжения [3-5,7,8].

В рамках феноменологического подхода, введя параметр повреждаемости при ползучести согласно предложению Ю. Н. Работнова [4], можно рассматривать обсуждаемые микронеоднородные материалы как некоторые макроскопически однородные повреждающиеся среды. При этом параметр повреждаемости может иметь скалярную, векторную либо тензорную природу.

Рассмотрим далее дислокационную ползучесть начально изотропного материала, содержащего плоские микротрещины. Для описания повреждаемости материала введем симметричный тензор второго ранга Ω_{kl} , а также скалярный параметр $\omega \in [0, \omega^*]$, имеющий энергетическую природу и удовлетворяющий кинетическому уравнению [6]

$$\dot{\omega} = L, \quad (1)$$

где точка над символом обозначает производную по времени t ; L – удельная мощность рассеиваемой энергии, $L = \sigma_{kl} \dot{\varepsilon}_{kl}$; σ_{kl} – компоненты тензора напряжений; ε_{kl} – компоненты тензора деформаций ползучести; $\omega = 0$ для $t = 0$ и $\omega = \omega^*$ в момент разрушения при ползучести.

Предположим существование потенциала ползучести, определяемого уравнением [1,2]

$$F = \sigma_e^2 - \chi^2(\dot{\varepsilon}_e) = 0. \quad (2)$$

Тогда

$$\dot{\varepsilon}_{kl} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}}. \quad (3)$$

Здесь первый член в (2) описывает форму поверхности потенциала, а второй член – ее размер; λ – некоторый скалярный множитель; σ_e – эквивалентное напряжение; $\dot{\varepsilon}_e$ – эквивалентная скорость деформаций ползучести, удовлетворяющая по определению следующему равенству:

$$\sigma_e \dot{\varepsilon}_e = L. \quad (4)$$

Преимущественная ориентация микротрещин в рассматриваемом материале вызывает его деформационную анизотропию. Для ее учета, эквивалентное напряжение должно быть скалярной функцией не только тензора напряжений, но и тензора Ω_{kl} , и параметра ω . Тогда, образуя базовый инвариант тензоров σ_{kl} и Ω_{kl} как

$$I_1 = \sigma_{kl} \Omega_{kl} \quad (5)$$

введем квадратичную

$$\sigma_2^2 = A(\omega) \sigma_i^2 + \alpha B(\omega) I_1^2 \quad (6)$$

и линейную

$$\sigma_1 = C(\omega) I_1 \quad (7)$$

скалярные функции инвариантов, а затем и эквивалентное напряжение

$$\sigma_e = \sigma_2 + \gamma \sigma_1. \quad (8)$$

Здесь $A(\omega)$, $B(\omega)$, $C(\omega)$ – некоторые функции скалярного параметра повреждаемости материала, α и γ – некоторые числовые коэффициенты, учиты-

вающие удельный вес различных составляющих в выражении (8); σ_i – интенсивность напряжений,

$$\sigma_i^2 = \frac{3}{2} S_{kl} S_{kl};$$

S_{kl} – компоненты девиатора напряжений,

$$S_{kl} = \sigma_{kl} - \frac{1}{3} \sigma_{nn} \delta_{kl},$$

δ_{kl} – символ Кронекера.

Эквивалентное напряжение (8) имеет достаточно общее представление и включает ряд частных случаев. Например, положив $\alpha = \gamma = 0$ и $A = 1$, приходим к эквивалентному напряжению $\sigma_e = \sigma_i$ в потенциале Губера-Мизеса.

Используя зависимости (2), (5) – (8) и выполняя дифференцирование согласно закону (3), получаем

$$\dot{\epsilon}_{kl} = 2\lambda\sigma_e \left[\frac{\frac{3}{2}A(\omega)S_{kl} + \alpha B(\omega)I_1\Omega_{kl}}{\sigma_2} + \gamma C(\omega)\Omega_{kl} \right]. \quad (9)$$

Для определения скалярного множителя λ умножаем обе части формулы (9) на σ_{kl} и производим суммирование по повторяющимся индексам. Тогда приходим к равенству

$$L = 2\lambda\sigma_e^2. \quad (10)$$

Сравнивая (4) и (10), находим

$$2\lambda\sigma_e = \dot{\epsilon}_e. \quad (11)$$

Тогда, учитывая (9) и (11), получаем определяющие уравнения

$$\dot{\epsilon}_{kl} = \dot{\epsilon}_e \left[\frac{\frac{3}{2}A(\omega)S_{kl} + \alpha B(\omega)I_1\Omega_{kl}}{\sigma_2} + \gamma C(\omega)\Omega_{kl} \right], \quad (12)$$

описывающие дислокационную ползучесть начально изотропных сред с плоскими микротрещинами. Функция $\dot{\epsilon}_e$ определяется из уравнения потенциала (2), то есть $\sigma_e = \chi(\dot{\epsilon}_e)$. Очевидно, что существует обратная зависимость

$$\dot{\epsilon}_e = v(\sigma_e). \quad (13)$$

Функция $v(\sigma_e)$ может быть взята как степенная зависимость

$$v(\sigma_e) = \sigma_e^k, \quad (14)$$

закон гиперболического синуса

$$v(\sigma_e) = \text{sh}(\sigma_e/a),$$

либо экспоненциальная зависимость

$$v(\sigma_e) = \exp(\sigma_e/b).$$

Здесь a , b , k – некоторые параметры материала. Очевидно, что зависимость (1), описывающую рост повреждаемости в материале, необходимо рас-

смаатривать совместно с определяющими уравнениями (12), (13).

Перейдем к конкретизации тензора повреждаемости Ω_{kl} . Например, в случае двух семейств неортогональных микротрещин, отличающихся углом β , имеем

$$\Omega_{kl} = \frac{1}{1+r} \rho n_k n_l + \frac{r}{1+r} \rho m_k m_l. \quad (15)$$

Здесь ρ – плотность распределения всех микротрещин, $\mathbf{n} = \{\cos\theta, \sin\theta, 0\}$ – единичный вектор нормали к микротрещинам первого семейства плотностью ρ_1 , $\rho_1 = \frac{1}{1+r} \rho$, $\mathbf{m} = \{\cos(\theta + \beta), \sin(\theta + \beta), 0\}$ – единичный вектор нормали к микро-

трещинам второго семейства плотностью ρ_2 , $\rho_2 = \frac{r}{1+r} \rho$, $r = \rho_2 / \rho_1$.

Выражение (15) для тензора повреждаемости Ω_{kl} имеет достаточно общее представление и включает ряд частных случаев. В случае двух семейств ортогональных микротрещин ($\beta = \pi/2$), получаем

$$\Omega_{kl} = \frac{1-r}{1+r} \rho n_k n_l + \frac{r}{1+r} \rho \delta_{kl}. \quad (16)$$

а в случае единственного семейства параллельных микротрещин ($r = 0$), имеем

$$\Omega_{kl} = \rho n_k n_l. \quad (17)$$

Заметим, что параметры ρ , β и r являются функциями времени и должны быть идентифицированы на основе физических методов исследования с помощью электронного и оптического микроскопов. В случае отсутствия информации о плотности распределения микротрещин, предположим следующую связь между скалярными параметрами повреждаемости

$$\sqrt{\alpha} \rho = \frac{\sqrt{B_0}}{1 - \omega/\omega^*}; \quad \eta \rho = \frac{C_0}{1 - \omega/\omega^*}, \quad (18)$$

где B_0 , C_0 – некоторые параметры материала. Подставляя тензор (15) в уравнения (12) и учитывая (13), (18), приходим к зависимостям

$$\dot{\varepsilon}_{kl} = v(\sigma_e) \left[\frac{\frac{3}{2} A(\omega) S_{kl} + \frac{B_0 B(\omega) J_1 D_{kl}}{(1 - \omega/\omega^*)^2}}{\sigma_2} + \frac{C_0 C(\omega) D_{kl}}{1 - \frac{\omega}{\omega^*}} \right], \quad (19)$$

где D_{kl} – новый тензор микроструктуры,

$$D_{kl} = \frac{1}{1+r} n_k n_l + \frac{r}{1+r} m_k m_l, \quad J_1 = \sigma_{kl} D_{kl},$$

$$\sigma_2^2 = A(\omega) \sigma_i^2 + \frac{B_0 B(\omega) J_1^2}{(1 - \omega/\omega^*)^2}; \quad \sigma_e = \sigma_2 + \frac{C_0 C(\omega) J_1}{1 - \omega/\omega^*}.$$

Для нахождения параметров A_0 , B_0 и C_0 , и конкретизации функций ска-

лярного параметра повреждаемости материала $A(\omega)$, $B(\omega)$, $C(\omega)$ в предложенной модели необходимо использовать результаты экспериментов на стандартных образцах, в которых реализуется однородное и неизменное с течением времени напряженное состояние. С этой целью рассмотрим серию испытаний при постоянной температуре в виде одноосного растяжения, одноосного сжатия и чистого кручения образцов из исследуемого материала.

Предположим, что в случае одноосного растяжения ($\sigma_{11} > 0$) справедливы следующие зависимости:

$$\dot{\epsilon}_{11} = \frac{K_+ \sigma_{11}^k}{(1 - \omega/\omega^*)^m}, \quad \dot{\omega} = \sigma_{11} \dot{\epsilon}_{11}. \quad (20)$$

Пусть, при одноосном сжатии ($\sigma_{11} < 0$) имеют место следующие соотношения:

$$\dot{\epsilon}_{11} = \frac{K_- |\sigma_{11}|^k}{(1 - \omega/\omega^*)^m}, \quad \dot{\omega} = \sigma_{11} \dot{\epsilon}_{11}. \quad (21)$$

В случае чистого кручения ($\sigma_{12} \neq 0$) примем

$$2\dot{\epsilon}_{12} = \frac{K_0 \sigma_{12}^k}{(1 - \omega/\omega^*)^m}, \quad \dot{\omega} = \sigma_{12} \dot{\epsilon}_{12}. \quad (22)$$

Здесь K_+ , K_- , K_0 , k и m - некоторые константы материала.

С другой стороны, рассмотрим определяющие уравнения (19), (14) и уравнение накопления повреждаемости (1), и получим аналогичные зависимости, описывающие ползучесть в базовых экспериментах. С этой целью предположим, что ориентация микротрещин всегда соответствует направлению наибольшего главного напряжения, т.е. примем тензор повреждаемости (17). Кроме того, функции скалярного параметра повреждаемости материала зададим в следующем виде

$$A(\omega) = \frac{A_0}{(1 - \omega/\omega^*)^{\frac{m}{k+1}}}; \quad B(\omega) = \frac{1}{(1 - \omega/\omega^*)^{\frac{m-2}{k+1}}}; \quad C(\omega) = \frac{1}{(1 - \omega/\omega^*)^{\frac{m-1}{k+1}}}, \quad (23)$$

где A_0 - некоторый параметр материала.

Так, при одноосном растяжении имеем $\mathbf{n} = \{1, 0, 0\}$. Тогда уравнения (19), (1) с учетом (14), (23) принимают вид

$$\dot{\epsilon}_{11} = \left(\sqrt{A_0 + B_0} + C_0 \right)^{k+1} \frac{\sigma_{11}^k}{(1 - \omega/\omega^*)^m}; \quad \dot{\omega} = \sigma_{11} \dot{\epsilon}_{11}. \quad (24)$$

В случае одноосного сжатия получаем вектор $\mathbf{n} = \{0, 1, 0\}$ и зависимости

$$\dot{\epsilon}_{11} = - \left(\sqrt{A_0} \right)^{k+1} \frac{|\sigma_{11}|^k}{(1 - \omega/\omega^*)^m}, \quad \dot{\omega} = \sigma_{11} \dot{\epsilon}_{11}. \quad (25)$$

В случае чистого кручения ориентация микротрещин связана с вектором

$\mathbf{n} = \{1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0\}$, а уравнения (19), (1) с учетом (14), (23) переписываются в виде

$$2\dot{\varepsilon}_{12} = \left(\sqrt{3A_0 + B_0} + C_0\right)^{k+1} \frac{\sigma_{12}^k}{(1 - \omega/\omega^*)^m}, \quad \dot{\omega} = \sigma_{12}\dot{\varepsilon}_{12}. \quad (26)$$

Далее сравнивая попарно зависимости (20) и (24), (21) и (25), (22) и (26), определяем параметры материала

$$A_0 = K_-^{\frac{2}{k+1}}, \quad C_0 = \frac{A_0}{K_+^{\frac{k+1}{k+1}} - K_0^{\frac{1}{k+1}}} + \frac{K_+^{\frac{1}{k+1}} + K_0^{\frac{1}{k+1}}}{2}, \quad B_0 = \left(K_+^{\frac{1}{k+1}} - C_0\right)^2 - A_0. \quad (27)$$

Таким образом, определяющие уравнения (19), описывающие дислокационную ползучесть начально изотропных сред с параллельными плоскими микротрещинами, принимают окончательно с учетом (23) следующий вид

$$\dot{\varepsilon}_{kl} = \frac{\Sigma_e^k}{(1 - \omega/\omega^*)^m} \left[\frac{3/2 A_0 S_{kl} + B_0 J_1 D_{kl}}{\Sigma_2} + C_0 D_{kl} \right], \quad (28)$$

где

$$\Sigma_2^2 = A_0 \sigma_i^2 + B_0 J_1^2, \quad \Sigma_e = \Sigma_2 + C_0 J_1$$

и параметры материала находятся из соотношений (27).

Используя соотношения (27), проанализируем далее различные частные случаи, вытекающие из зависимостей (28), (17), (1).

I. Пусть, в базовых экспериментах установлено

$$K_+ = K_-, \quad K_0 = 3^{\frac{k+1}{2}} K_+. \quad (29)$$

Подставляя затем (29) в (27), получаем $B_0 = C_0 = 0$. Следовательно, эквивалентное напряжение совпадает с точностью до параметра с интенсивностью напряжений, то есть

$$\Sigma_e = \sqrt{A_0} \sigma_i, \quad (30)$$

а уравнения (28) превращаются в зависимости

$$\dot{\varepsilon}_{11} = \frac{3}{2} \left(\sqrt{A_0}\right)^{k+1} \frac{\Sigma_e^{k-1}}{(1 - \omega/\omega^*)^m} S_{kl}, \quad (31)$$

соответствующие традиционным повреждающимся средам, не чувствительным к виду нагружения. При этом, равенства (29) являются условиями применения уравнений (31).

II. Предположим, что в базовых экспериментах получено

$$K_+ \neq K_-, \quad K_0^{\frac{2}{k+1}} = K_+^{\frac{2}{k+1}} + 2K_-^{\frac{2}{k+1}}. \quad (32)$$

Используя затем (27) и (32) находим $C_0 = 0$ и

$$\Sigma_e = \sqrt{A_0 \sigma_i^2 + B_0 J_1^2}. \quad (33)$$

Тогда, уравнения (28) принимают вид

$$\dot{\varepsilon}_{kl} = \frac{\Sigma_e^k}{(1 - \omega/\omega^*)^m} \left[\frac{3/2 A_0 S_{kl} + B_0 J_1 D_{kl}}{\Sigma_2} \right]. \quad (34)$$

Таким образом, условия (32) соответствуют зависимостям (34), описывающим ползучесть повреждающихся сред, разнсопротивляющихся растяжению и сжатию.

III. Пусть, установлены равенства

$$K_+ \neq K_-, \quad K_-^{k+1} = \left(K_+^{k+1} - K_0^{k+1} \right) \left[\frac{1}{2} \left(K_+^{k+1} - K_0^{k+1} \right) - K_-^{k+1} \right]. \quad (35)$$

Тогда, подставляя (35) в (27), получаем $B_0 = 0$. Поэтому эквивалентное напряжение имеет вид

$$\Sigma_e = \sqrt{A_0} \sigma_i + C_0 J_1, \quad (36)$$

а уравнения (28) записываются следующим образом:

$$\dot{\varepsilon}_{kl} = \frac{\Sigma_e^k}{(1 - \omega/\omega^*)^m} \left[\frac{3}{2} \sqrt{A_0} \frac{S_{kl}}{\sigma_i} + C_0 D_{kl} \right]. \quad (37)$$

Следовательно, условия (35) являются рекомендациями по применению зависимостей (37), описывающих ползучесть начально изотропных повреждающихся сред с двумя независимыми характеристиками.

IV. Вариант

$$K_+ \neq K_-; \quad K_0^{k+1} \neq K_+^{k+1} + 2K_-^{k+1};$$

$$K_-^{k+1} \neq \left(K_+^{k+1} - K_0^{k+1} \right) \left[\frac{1}{2} \left(K_+^{k+1} - K_0^{k+1} \right) - K_-^{k+1} \right] \quad (38)$$

является наиболее общим случаем, соответствующим трем независимым характеристикам ползучести повреждающихся сред. При этом, процесс ползучести описывается уравнениями (28), а параметры модели находятся из (27).

В качестве примера рассмотрим ползучесть алюминиевого сплава АК4-1Т при температуре 473К [5], описываемую соотношениями (20)-(22) с константами $K_+ = 5.5 \times 10^{-23} \text{ МПа}^{-m} \text{ ч}^{-1}$, $K_- = 2.25 \times 10^{-23} \text{ МПа}^{-m} \text{ ч}^{-1}$, $K_0 = 11.36 \times 10^{-21} \text{ МПа}^{-m} \text{ ч}^{-1}$, $k = 8$, $m = 3$ Критическое значение параметра повреждаемости определяется равенством $\omega^* = \sigma_i^2 (a - b \sigma_m)$, где $a = 4 \times 10^{-4} \text{ МПа}^{-m} \text{ ч}^{-1}$ и $b = 4 \times 10^{-7} \text{ МПа}^{-m} \text{ ч}^{-2}$. Очевидно, что данный материал соответствует наиболее общему случаю IV.

Полученные теоретические результаты при одноосном растяжении для $\sigma_{11} = 180 \text{ МПа}$ (рис. 1а) и $\sigma_{11} = 160 \text{ МПа}$ (рис. 1б) сравниваются с экспери-

ментальными данными. Аналогичное сопоставление в случае одноосного сжатия дано на рис. 2а для $\sigma_{11} = -210$ МПа и на рис. 2б для $\sigma_{11} = -200$ МПа. Результаты расчетов по зависимостям (28), (17), (1) приведены на этих рисунках для деформации ε_{11} (сплошная линия) и деформации ε_{22} (пунктирная линия). Другие обозначения соответствуют здесь экспериментальным данным (символ О для деформации ε_{11} , ■ для ε_{22} , ■ для ε_{33}). Учитывая естественный разброс экспериментальных данных, соответствие теоретических и экспериментальных результатов можно считать удовлетворительным.

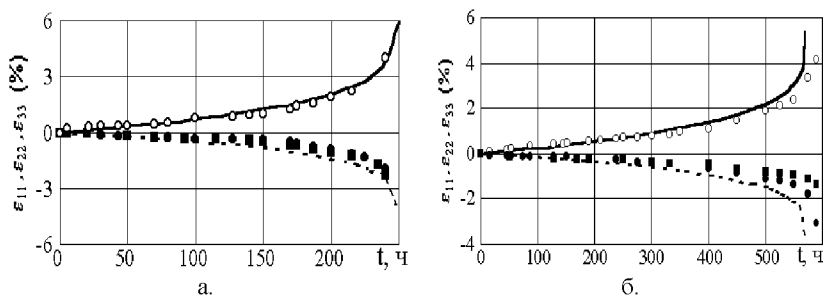


Рис.1. Ползучесть алюминиевого сплава при одноосном растяжении.

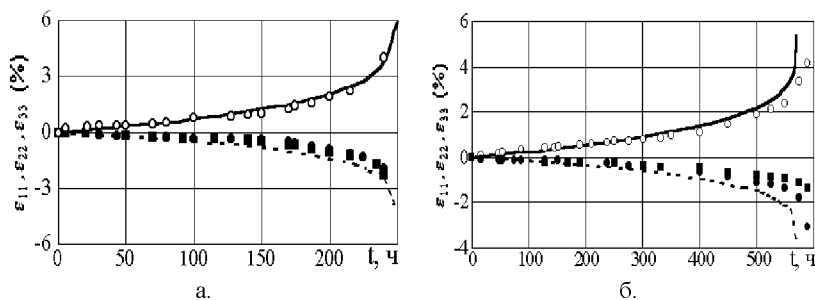


Рис.2. Ползучесть алюминиевого сплава при одноосном сжатии.

Список литературы: 1. Золочевский А.А. Об учете разносопротивляемости в теории ползучести изотропных и анизотропных материалов // Журн. прикл. механики и технической физики. – 1982, № 4. – С. 140-144. 2. Золочевский А.А. О влиянии вида нагружения на ползучесть изотропных упрочняющихся материалов // Прикл. механика. – 1988, 24, № 2. – С. 94-101. 3. Исследование процессов разрушения элемента тела в результате повреждаемости материала при ползучести / Ю.Н. Шевченко, Р.Г. Терехов, Н.С. Брайковская, С.М. Захаров // Прикл. механика. – 1994, 30, № 4. – С. 21-30. 4. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с. 5. Рубанов В.В. Экспериментальное обоснование определяющих уравнений ползучести металлических материалов с различными свойствами на растяжение и сжатие: Автореферат дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Новосибирск, 1987. – 14 с. 6. Altenbach H., Altenbach J., Zolochovsky A. Erweiterte Deformationsmodelle und Versagenskriterien der Werkstoffmechanik. – Stuttgart: Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, 1995. – 172 s. 7. Betten J. Kontinuumsmechanik. – Berlin: Springer-Verlag, 1993. – 406 s. 8. Riedel H. Fracture at High Temperatures. – Berlin: Springer-Verlag, 1987. – 425 p.

Поступила в редакцию 25.03.2001.